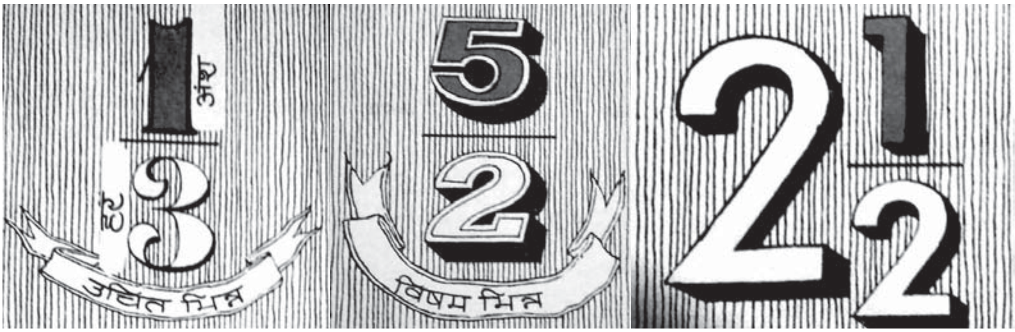
कौन बड़ी-कौन छोटी
भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना

अंशुल राजुरकर



भिन्नात्मक संख्याएँ, प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण का एक अभिन्न हिस्सा हैं। सामान्य तौर पर भिन्नात्मक संख्याओं को बहुत कठिन विषयवस्तु समझा जाता है पर ऐसा है नहीं। असल बात यह है कि इस विषयवस्तु पर कक्षा में ठीक से कार्य नहीं होने के कारण यह कठिन लगने लगती है। भिन्नात्मक संख्याओं की विषयवस्तु पर कार्य करने के दौरान यह देखने में आता है कि इसकी शुरुआत अकसर चित्रात्मक निरूपण जैसे– वृत्ताकार और आयताकार आकृति बनाकर उसके किसी भाग को छायांकित कर की जाती है। और फिर उसी के इर्द-गिर्द भिन्नात्मक संख्याओं का अध्यापन घूमता रहता है। इस आलेख में, मैंने प्राथमिक कक्षाओं के बच्चों के साथ भिन्नात्मक संख्याओं पर किए गए काम के दौरान हुए अनुभवों को लिखा है, ख़ासकर, बच्चे भिन्नात्मक संख्याओं को कैसे समझते हैं, उनकी तुलना कैसे करते हैं, उसमें उनको क्या-क्या समस्याएँ आती हैं, आदि। मैंने यह भी पाया कि बच्चे इन संख्याओं को एक संख्या के रूप में न समझकर दो अलग-अलग पूर्ण संख्या समझते हैं और भिन्नात्मक संख्याओं पर भी पूर्ण संख्याओं की तरह ही कार्य भी करते हैं और उनमें तुलना भी पूर्ण संख्या के समान ही करते हैं। जैसे– जब उनको 3/4 + 2/4 हल करने को कहा गया और उन्होंने इसका उत्तर 5/8 दिया। इन समस्याओं (भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना) पर मैंने बच्चों के साथ कार्य किया। इसमें अवधारणा से सम्बन्धित बच्चों के पूर्व ज्ञान पर कार्य करना, भिन्नात्मक संख्या की तुलना करने के अनुभव देना व सबसे ज़रूरी, इस अवधारणा का दैनिक जीवन के सन्दर्भ में कैसे व कहाँ उपयोग होता है, आदि को अलग-अलग मॉडल, तरीक़ों व गतिविधियों का उपयोग कर सामने रखना।

मेरा यह अनुभव एक विद्यालय की कक्षा पाँचवीं का है जिसमें 5 बालक और 5 बालिकाएँ मिलाकर कुल दस बच्चे थे। मैंने बच्चों के साथ उन्हें पढ़ाई जा रही विषयवस्तु पर ही बातचीत करना शुरू किया। शुरुआत कुछ सामान्य बातचीत से हुई, फिर मैं बच्चों के साथ भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना पर चर्चा करने लगा। मुझे लगा कि बच्चे भिन्नात्मक संख्याएँ और उनकी तुलना कुछ-कुछ समझते हैं, क्योंकि पिछले कुछ दिनों से गणित की इस कक्षा में भिन्न की तुलना पर काम हो रहा था। मैंने एक प्रश्न से शुरुआत की जिसमें बच्चों को यह बताना था कि दो तिहाई और तीन चौथाई में से कौन-सी संख्या बड़ी होती है? बच्चों ने बताया

कि तीन चौथाई बड़ी होती है। मुझे ख़ुशी हुई कि बच्चों ने सही उत्तर दिया। मैंने बच्चों को कुछ और प्रश्न दिए, जैसे– एक आधा और दो चौथाई में कौन-सी संख्या बड़ी है? बच्चों ने झट से बताया कि दो चौथाई बड़ी है। मुझे लगा कि शायद वे सवाल को समझे नहीं हैं तो मैंने कुछ प्रश्नों को श्यामपट्ट पर लिख दिया और बोला कि चित्र बनाकर दर्शा सकते हो तो वह भी ठीक है, और चित्र आपके अनुभव से भी आ सकते हैं, जैसे– किसी को आधी रोटी दी और किसी को एक तिहाई, तो किसको ज़्यादा मिलेगी और तब तुलना करो। सवाल कुछ इस प्रकार थे :

1. $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{5}$ व $\frac{2}{5}$

3. $\frac{1}{2}$ व $\frac{2}{4}$ 4. $\frac{3}{4}$ व $\frac{4}{5}$

कक्षा में उपस्थित 10 बच्चों में से केवल 3 ने सवालों के सही उत्तर दिए, परन्तु भिन्नात्मक संख्याओं का चित्रात्मक प्रस्तुतिकरण उनका भी ठीक नहीं था। अब मैंने बच्चों के साथ प्रत्येक प्रश्न पर विस्तार से चर्चा की, ताकि वे भिन्न को कैसे समझते हैं, कैसे देखते हैं, आदि को मैं स्वयं भी समझ सकूँ। बातचीत की शुरुआत उन बच्चों से हुई, जिन्होंने सवाल के सही उत्तर दिए, पर वे अपने उत्तर के तर्क नहीं रख पाए। एक विद्यार्थी ने कहा कि चित्र को देखकर उत्तर निकाला है। फिर उन बच्चों के साथ भी चर्चा की, जिन्होंने सवाल के सही उत्तर नहीं दिए थे। लगभग सभी बच्चों के द्वारा दिए गए तर्क एक ही प्रकार के मिले, जो निम्न हैं :

- पहले सवाल, 1/2 व 1/3, में संख्या 1/3 बड़ी है। बच्चों ने यह तर्क दिया कि दोनों भिन्नात्मक संख्याओं (1/2 व 1/3) के अंश में समान संख्या 1 है। अब हर देखते हैं। पहली संख्या 1/2 के हर में 2 है और दूसरी संख्या 1/3 के हर में 3 है। चूँकि 2 से बड़ा 3 है इसलिए 1/2 व 1/3 में, 1/3 भिन्नात्मक संख्या बड़ी है।
- दूसरे सवाल, 2/5 व 3/5, में 3/5 संख्या बड़ी है। बच्चों द्वारा तर्क दिया गया कि दोनों भिन्नात्मक संख्याओं (2/5 व 3/5) के हर में समान संख्या 5 है। अब अंश देखते हैं। पहली संख्या 2/5 के अंश में 2 है और दूसरी संख्या 3/5 के अंश में 3 है। चूँकि 2 से बड़ा 3 है इसलिए 2/5 व 3/5 में, 3/5 संख्या बड़ी है।
- तीसरे सवाल, 1/2 व 2/4, में 2/4 संख्या बड़ी है। यहाँ पर बच्चों ने पहले दोनों भिन्नात्मक संख्याओं के अंश और फिर हर की तुलना की और बताया कि 2/4 बड़ी है।
- इसी प्रकार चौथे सवाल, 3/4 व 4/5, में संख्या 4/5 बड़ी है। यहाँ पर भी बच्चों द्वारा पहले दोनों भिन्नात्मक संख्याओं के अंशों और फिर हरों की तुलना की गई और बताया कि 4/5 बड़ी है।

बच्चों के साथ हुई चर्चा व उनके द्वारा दिए गए सवालों के जवाबों का विश्लेषण किया, जिसमें कुछ कारण निकलकर आए :

- बच्चे भिन्नात्मक संख्या के मायने नहीं समझते हैं। वे भिन्नात्मक संख्या को एक संख्या के रूप में न देखकर दो अलग-अलग पूर्ण संख्याओं के रूप में देखते हैं।
- बच्चे भिन्नात्मक संख्या की तुलना भी पूर्ण संख्या के समान ही करते हैं।
- बच्चे उस भिन्नात्मक संख्या को दूसरी की तुलना में बड़ी कहते हैं जिसके अंश या हर में कोई बड़ी संख्या होती है। वे अंश और हर के संख्यात्मक मान के आधार पर बड़ी या छोटी भिन्नात्मक संख्या तय करते हैं।
- बच्चों द्वारा नोटबुक में बनाए गए चित्रों (चित्र 1) को देखने पर समझ आया कि तुलना के दौरान बच्चे अलग-अलग इकाई

ले रहे हैं, जैसे– सवाल 1/6 व 5/6 में 1/6 संख्या दर्शाने के लिए वृत्ताकार एवं 5/6 के लिए आयताकार, और इकाई में किए जाने वाले हिस्सों के क्षेत्रफल भी बराबर नहीं हैं।



चित्र 1 : तुलना के दौरान इकाई एवं इकाई के हिस्से अलग-अलग लेना

ग़लतियाँ क्यों हुई होंगी ?

भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना के दौरान बच्चों द्वारा की जाने वाली ग़लतियों और उनके तर्कों का विश्लेषण करने, कक्षा प्रक्रिया, आदि को समझने से की गई ग़लतियों के सन्दर्भ में कुछ मुख्य बातें निकलकर आती हैं। जैसे– कई बार कक्षा-कक्ष में बच्चों का जुड़ाव नहीं होना, नई अवधारणा पर समझ बनाने में पूर्व ज्ञान का उपयोग न हो पाना, ठोस वस्तु के अनुभव नहीं मिल पाना, अवधारणा में वास्तविक जीवन के सन्दर्भ की कमी, अवधारणात्मक ग़लतफ़हमियाँ, आदि। यहाँ इन कारणों पर विस्तार से चर्चा की गई है :

पूर्व ज्ञान का अभाव : गणित शिक्षण में पूर्व ज्ञान का विशेष महत्त्व है। किसी भी अवधारणा या विषयवस्तु को सीखने में पूर्व ज्ञान अहम भूमिका अदा करता है। जिस प्रकार गिनना सीखने के पहले हम संख्या-पूर्व अवधारणा पर कार्य करते हैं, ठीक वैसे ही हमें भिन्नात्मक संख्या की तुलना सीखने के पहले अपेक्षित पूर्व ज्ञान, जैसे– भिन्नात्मक संख्या के मायने व समतुल्य भिन्नात्मक संख्या, पर कार्य करना होता है।

स्वयं करके देखने के अवसर की कमी : अकसर पाठ्यक्रम को निर्धारित समय सीमा में पूरा कराने के चक्कर में बच्चों को पर्याप्त अवसर नहीं मिल पाते हैं जिसके कारण वे केवल पाठ्यपुस्तक की बातों को रट लेते हैं। कुछ स्थानों पर अवधारणा को समझाने के लिए शिक्षण अधिगम सामग्री (TLM) का भी उपयोग होता है पर बच्चे उस सामग्री को केवल देख पाते हैं, उनको इसका स्वयं से उपयोग नहीं करने दिया जाता है। साथ ही, बच्चे कैसे सीखते हैं?, अवधारणा को कैसे समझ रहे हैं?, आदि को लेकर उनके साथ बातचीत न होना। ज़्यादातर बच्चे यह नहीं मानते हैं कि 1/2 एवं 2/4 का मान एक ही है। इस प्रकार की ग़लती का एक मुख्य कारण बच्चों को पर्याप्त मौक़े नहीं मिल पाना है। वे सवाल को केवल यांत्रिक रूप से करते हैं और सोच ही नहीं पाते कि 1/2 व 2/4 बराबर हैं।

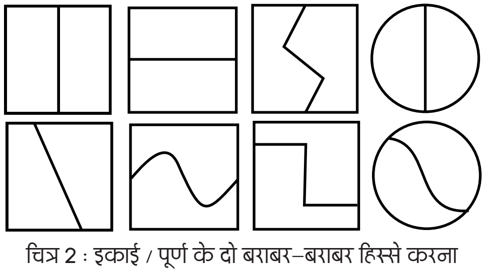
सन्दर्भ से न जोड़ पाना : केवल सैद्धान्तिक रूप से पढ़ाया जाना अर्थात पूर्ण रूप से पाठ्यपुस्तक केन्द्रित होकर शिक्षण करना, जिससे बच्चे रटन्त शिक्षा की ओर आगे बढ़ने लगते हैं। इसका नतीजा यह होता है कि वे 1/2 व 1/3 में 1/3 संख्या को बड़ी बताते हैं। बच्चों के लिए यह समझना मुश्किल है कि 1/2 व 1/3 में 1/2 संख्या बड़ी है, क्योंकि इसके साथ न तो किसी सन्दर्भ को जोड़ा जाता है, न ही ऐसे उदाहरण व स्थितियाँ रखी जाती हैं कि बच्चे इसको अपने परिवेश में अनुभव कर पाएँ।

अवधारणात्मक ग़लतफ़हमियाँ : शिक्षण के दौरान कुछ ग़लतफ़हमियाँ भी बन जाती हैं, जैसे– जब हम कहते हैं कि यह ज़रूरी नहीं कि पूर्ण के हिस्से भी सर्वांगसम हों, तब बच्चे यह भी समझ लेते हैं कि हिस्से अलग-अलग आकार के

होते हैं तो उनके क्षेत्रफल भी अलग-अलग होते हैं। हर समान होने पर बड़े अंश वाली भिन्नात्मक संख्या बड़ी होती है, बच्चे इसको तो समझे पर इसी के जैसे वे यह भी समझ रहे हैं कि अंश समान होने पर बड़े हर वाली भिन्नात्मक संख्या बड़ी होती है, और भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना के लिए दो अलग-अलग प्रकार की आकृतियों का उपयोग करना।

बच्चों के साथ कार्य

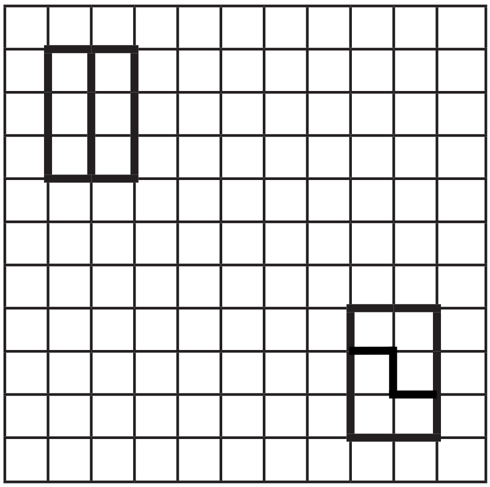
मैंने कक्षा पाँचवीं के विद्यार्थियों के साथ भिन्नात्मक संख्या की समझ पर योजना बनाकर कार्य किया। बच्चों के साथ हुई चर्चा में मुझे यह जानकारी मिल गई थी कि बच्चों को क्या-क्या आता है और भिन्नात्मक संख्या की उनकी समझ कितनी है। किसी भी नई अवधारणा पर कार्य करने के पहले हमें उस अवधारणा से सम्बन्धित आवश्यक पूर्व ज्ञान/ अवधारणा पर कार्य करना चाहिए। इसलिए सबसे पहले मैंने यह जानने की कोशिश की कि उनकी मौजूदा भिन्नात्मक संख्या की समझ क्या है। कक्षा 2, 3 के बच्चे भी आधा, पौना, पाव, डेढ़, ढाई आदि की समझ रखते हैं। मैंने दैनिक जीवन में उनके द्वारा काम में ली जाने वाली इन भिन्नात्मक संख्याओं से ही शुरुआत की। मैंने पाया कि बच्चे इन शब्दों को समझते थे और वे विभिन्न उदाहरण देकर भी बता पा रहे थे कि वे इन शब्दों को कहाँ-कहाँ उपयोग में लेते हैं। जैसा कि मैंने पहले कहा एक दिक़्क़त गणित की अवधारणाओं के शिक्षण में यह है कि अकसर आसपास मौजूद गणित को हम महसूस नहीं कर पाते और उसका कक्षा में उपयोग नहीं कर पाते। बच्चों के साथ इन शब्दों पर इस तरह से बातचीत के बाद इन भिन्नात्मक संख्याओं को बोर्ड पर लिखा गया।



चित्र 2 : इकाई / पूर्ण के दो बराबर-बराबर हिस्से करना

मुझे यह भी लगा कि भिन्नात्मक संख्या को समझने के लिए पेपर फ़ोल्डिंग एक अच्छा और आसानी से उपलब्ध साधन है। पेपर फ़ोल्डिंग में हम क्षेत्रफल को आधार मानकर इकाई के बराबर हिस्से करते हैं। इसी तरह :

- डॉट्स शीट या गणित की वर्गाकार खानों वाली नोटबुक का इस्तेमाल भिन्नात्मक संख्या को समझाने के लिए एक सरलता से उपलब्ध होने वाला साधन है। मैंने इसकी सहायता से ही बच्चों को इकाई बनाना, उसके बराबर-बराबर हिस्से करना, अर्थात भिन्नात्मक संख्या के चित्रात्मक निरूपण पर कार्य किया।
- **भिन्नात्मक संख्या के मायने पर कार्य करना:** यह भी समझने की ज़रूरत होती है कि अंश में लिए गए हिस्से (छायांकित या अछायांकित दोनों ही हो सकते हैं) को और हर में कुल बराबर हिस्से की संख्या को रखते हैं। अवधारणा पर कार्य करने के दौरान बच्चों के मस्तिष्क में यह धारणा बन जाती है कि भिन्नात्मक संख्या के अंश में इकाई के केवल छायांकित हिस्से को ही लिया जाता है, इसीलिए इस भ्रान्ति पर भी कार्य किया जाना आवश्यक है।



चित्र 3 : गणित की नोटबुक का उपयोग करते हुए इकाई का निर्माण व बराबर-बराबर हिस्से करना

- भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना करने के लिए एक ही प्रकार की आकृति, जैसे– आयताकार या वृत्ताकार, ली और उसका क्षेत्रफल भी समान रखा। साथ ही जब भिन्नात्मक संख्या को व्यवहारिक जीवन से जोड़कर बताते हैं और बच्चे स्वयं करके देखते हैं, तब वे भिन्नात्मक संख्या को बहुत अच्छे से समझते हैं और उनकी समझ भी पुख़्ता होती है। बच्चे को जितना अधिक अनुभव दिया जाता है, वह अवधारणा को आसपास के परिवेश में उतना ही अधिक देख पाता है, जैसे– एक रोटी को दो व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटने पर प्रत्येक व्यक्ति को मिलने वाला हिस्सा, इसी प्रकार एक रोटी को तीन व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटने पर प्रत्येक व्यक्ति को मिलने वाला हिस्सा, किस स्थिति में रोटी का हिस्सा बड़ा होगा?, इस प्रकार के उदाहरण रखने पर बच्चे आसानी से उत्तर बता देते हैं। फिर वे यह भी सोच पाते हैं कि 1/2 व 1/3 में 1/2 भिन्नात्मक संख्या बड़ी होती है।

भिन्नात्मक संख्या की तुलना

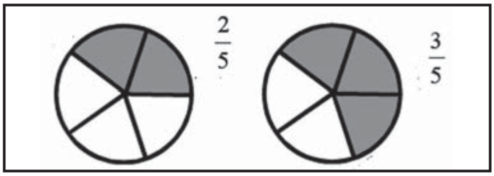
प्राथमिक कक्षाओं के पाठ्यक्रम की यह अपेक्षा है कि कक्षा पाँचवीं तक बच्चों को भिन्न की तुलना करना आ जाना चाहिए। भिन्नात्मक संख्या की तुलना के दौरान हमें तीन स्थितियाँ प्राप्त होती हैं। पहली स्थिति : जब भिन्नात्मक संख्याओं के हर समान हों और अंश असमान। दूसरी स्थिति: जब भिन्नात्मक संख्याओं के अंश समान हों और हर असमान। तीसरी स्थिति : जब भिन्नात्मक संख्याओं के हर एवं अंश दोनों ही असमान हों।

जब भिन्नात्मक संख्याओं के हर समान हों और अंश असमान

कक्षा में अलग-अलग उदाहरणों के माध्यम से इस पर कार्य किया और बच्चों के साथ बातचीत की गई।

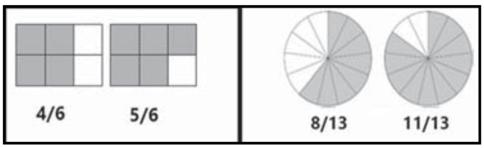
$$\frac{2}{5} \text{ व } \frac{3}{5} \quad \frac{4}{6} \text{ व } \frac{5}{6} \quad \frac{8}{13} \text{ व } \frac{11}{13}$$

उपरोक्त पर एक-एक कर बातचीत की गई। 2/5 एवं 3/5 में हमें पूर्ण को पाँच बराबर हिस्सों में बाँटकर दो हिस्से लेने हैं। इसी प्रकार, 3/5 में हमें पूर्ण को पाँच बराबर हिस्सों में बाँटकर तीन हिस्से लेने हैं। इसपर बातचीत करते-करते व कई उदाहरणों के बाद धीरे-धीरे यह स्पष्ट हो गया कि पाँच में से तीन हिस्से बड़ी संख्या है। इसी प्रकार, सवाल 4/6 एवं 5/6 और सवाल 8/13 एवं 11/13 पर बच्चों के साथ कार्य किया एवं बातचीत की गई। इसमें बच्चों के द्वारा 5/6 और 11/13 को तुलना में बड़ी संख्याओं के रूप में बताया गया। बच्चों से इन्हें चित्रात्मक रूप में प्रस्तुत करने को कहने पर वे इसे कर पाए।

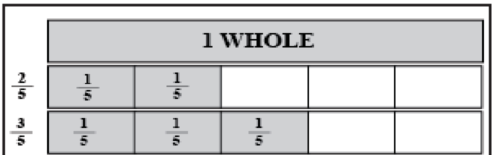


चित्र 4 : 2/5 एवं 3/5 का चित्रात्मक निरूपण

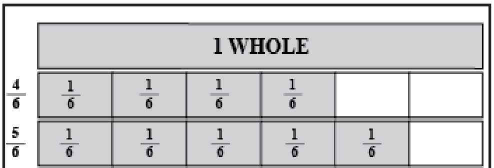
$$\frac{4}{6} \text{ व } \frac{5}{6} \quad \frac{8}{13} \text{ व } \frac{11}{13}$$



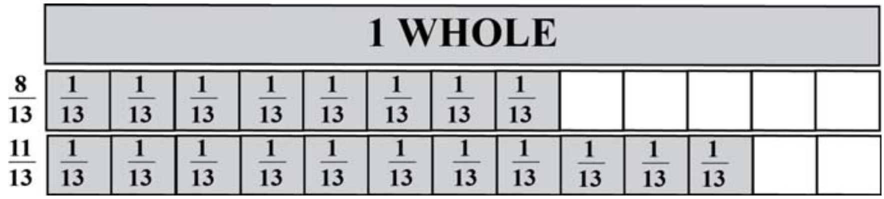
चित्र 5 : 4/6 व 5/6 और 8/13 व 11/13 का चित्रात्मक निरूपण



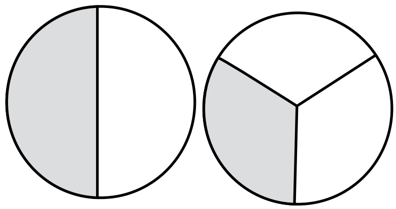
चित्र 6 : 2/5 एवं 3/5 का फ्रैक्शन वॉल निरूपण



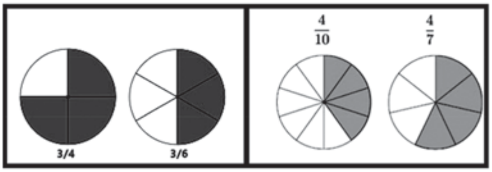
चित्र 7 : 4/6 एवं 5/6 का फ्रैक्शन वॉल निरूपण



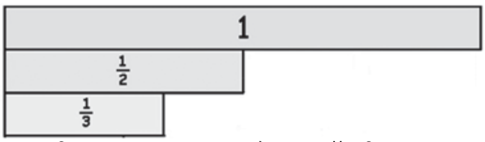
चित्र 8 : 8/13 एवं 11/13 का फ्रैक्शन वॉल निरूपण



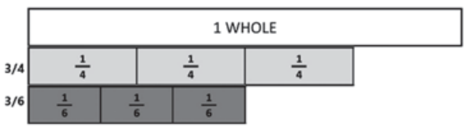
चित्र 9 : 1/2 एवं 1/3 का चित्रात्मक निरूपण



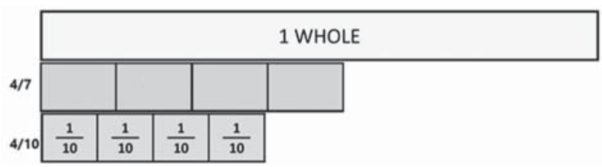
चित्र 10 : 3/4 व 3/6 एवं 4/10 व 4/7 का चित्रात्मक निरूपण



चित्र 11 : 1/2 व 1/3 का फ्रैक्शन वॉल निरूपण



चित्र 12 : 3/4 एवं 3/6 का फ्रैक्शन वॉल निरूपण



चित्र 13 : 4/7 एवं 4/10 का फ्रैक्शन वॉल निरूपण

मेरा अनुभव व कार्य के दौरान बनी समझ

'भिन्नात्मक संख्या की अवधारणा पर कार्य करते हुए मेरा यह अनुभव रहा कि किसी भी अवधारणा को सिखाने के लिए कक्षा में योजनाबद्ध तरीक़े से कार्य करना और प्रतिदिन अपने कार्यों की समीक्षा करना अत्यावश्यक है। यह भी समझ बनी कि जब सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में सभी बच्चे शामिल होते हैं तो वे एक दूसरे से भी बहुत कुछ सीखते हैं, अर्थात साथ-साथ सीखना (peer learning) देखने को मिला। इसमें उनके जीवन के अनुभव व उससे मिली अवधारणात्मक समझ के उपयोग से भी बहुत फ़ायदा होता है।

कक्षा शिक्षण के दौरान बच्चों के साथ बातचीत की भूमिका व उसके महत्त्व को समझ पाया, इससे मुझे अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक ग़लतफ़हमियों को समझने में मदद मिली। वास्तव में, बच्चों के साथ कार्य करते समय उनकी प्रतिक्रियाओं को लेना बहुत ज़रूरी है, चाहे वे सवालों के सही उत्तर दे रहे हों या ग़लत। इससे यह हुआ कि मैं उनके तर्कों व भिन्नात्मक संख्या को सोचने के नज़रिए को समझ पाया, जिससे मुझे आगे की योजना बनाने व कक्षा में कार्य करने में सरलता हुई।

अंशुल राजुरकर पिछले 8 वर्षों से शिक्षा के क्षेत्र में काम कर रहे हैं। गणित शिक्षण एवं प्रशिक्षण में विशेष रूचि है। वर्ष 2014 से 2016 तक रूम टू रीड के बालिका शिक्षा कार्यक्रम में बैतूल (मध्य प्रदेश) एवं धमतरी (छत्तीसगढ़) में कार्य किया और वर्ष 2017 से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, धमतरी, छत्तीसगढ़ में गणित एवं भाषा के स्रोत व्यक्ति के रूप में कार्यरत हैं।
सम्पर्क : anshul.rajurkar@azimpremjifoundation.org